На правах рукописи

Ю.Мар.

Мартышенко Юлия Геннадьевна

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург 2011

Работа выполнена на кафедре математики Нижнетагильского технологического института (филиала) федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Воротников Владимир Ильич

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, профессор Сесекин Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук Серков Дмитрий Александрович

Ведущая организация — Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Защита состоится «27» апреля 2011 г. в 15^{00} часов на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН (620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «25» марта 2011 г.

Подписано в печать 16.03.2011. Формат 60×90 1/
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Ризограф
Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,4. Тираж 100 экз. Заказ
Отпечатано в РИО НТИ (ф) УрФУ
622031, г. Нижний Тагил, ул. Красногвардейская, 59

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Н.Ю. Лукоянов

Общая характеристика работы

1. Актуальность темы. Начиная с середины XX столетия бурное развитие получили задачи об устойчивости и стабилизации динамических систем по отношению к некоторой заданной части переменных (а не по всем переменным), определяющих состояние исследуемой системы.

Благодаря большой математической общности постановки, указанные задачи являются междисциплинарными и естественным образом возникают при моделировании многих явлений и управляемых процессов в самых разных разделах науки: механике, физике, экономике, биологии, и других. Они часто называются также задачами частичной устойчивости (стабилизации).

Основополагающие результаты в данной области принадлежат В.В. Румянцеву, в работах которого заложены основы теории устойчивости по отношению к части переменных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, а также показана принципиальная применимость полученных результатов к задачам устойчивости более общих моделей систем, содержащих звенья с распределенными параметрами.

В последующих работах многих ученых теория и методы исследования задач устойчивости и стабилизации по отношению к части переменных получили определенное развитие; также решен ряд важных прикладных проблем.

Проведенные исследования выявили принципиальные трудности, возникающие при изучении задач устойчивости (стабилизации) по отношению к части переменных, для преодоления которых потребовались существенно новые идеи, выдвинутые в ряде работ. Были вскрыты и специфические особенности этих задач, проливающие свет на опасности, которые кроются на пути практического использования некоторых заманчивых теоретических результатов. Оказалось также, что задачи устойчивости (стабилизации) по отношению к части и по отношению ко всем переменным тесно связаны между собой и дополняют друг друга при решении практических вопросов.

С другой стороны, свойство частичной устойчивости в ряде случаев является не только достаточным для нормального функционирования систем, но и необходимым для обеспечения желательных режимов их работы.

Именно задачи частичной устойчивости (стабилизации), в отличие от задач устойчивости (стабилизации) по всем переменным, становятся строгой математической базой для многих важных современных исследований. Это обстоятельство определяет актуальность выбранной темы исследования.

2. Цель работы. Начиная с основополагающих работ В.В. Румянцева основным методом исследования задач устойчивости и стабилизации по части переменных является метод функций Ляпунова, оказавшийся весьма эффективным при анализе как теоретических, так и прикладных проблем.

Однако хотя во многих прикладных задачах метод функций Ляпунова и позволяет получить строгие и легко интерпретируемые условия частичной устойчивости, тем не менее, в целом вопросы конструктивного построения функций Ляпунова до сих пор остаются малоизученными.

Кроме того, в ряде рассматривающихся в настоящее время постановках задач частичной устойчивости требования к соответствующим функциям Ляпунова неизбежно являются чрезмерно жесткими.

В такой ситуации значительный интерес представляет дальнейшее развитие метода в плане ослабления требований к функциям Ляпунова, а также развитие других подходов к задачам частичной устойчивости и стабилизации. С другой стороны, необходима дальнейшая модификация задач частичной устойчивости, позволяющая найти приемлемый компромисс между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и требованиями к функциям Ляпунова.

Кроме того, небезынтересно использовать накопленный в рамках решения задач частичной стабилизации научный потенциал и для решения задач управления на конечном промежутке времени.

С этой целью в данной работе предлагается:

1) расширить возможности метода функций Ляпунова в задачах частичной устойчивости (стабилизации) путем развития концепции детектируемости динамических систем, предполагающей анализ структурных форм систем, для которых устойчивость по одной части переменных будет фактически означать устойчивость по отношению к другой (большей) части переменных;

2) рассмотреть более общие задачи частичной устойчивости, в рамках которых возможно *найти приемлемый компромисс между содержательным смыслом* понятия частичной устойчивости и требованиями к функциям Ляпунова, а также унифицировать (в известной мере) исследования задач устойчивости нестационарных и стационарных систем;

3) использовать развитые при решении задач частичной стабилизации подходы для исследования нелинейных задач управления вращательным движением асимметричного твердого тела при игровой модели помех.

3. Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, а также методы математической теории управления.

4. Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие новые результаты.

1) Условия на структуру нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, при которых устойчивость их нулевого положения равновесия или устойчивость «частичного» (нулевого) положения равновесия по отношению к одной части переменных будет фактически означать устойчивость указанных положений равновесия по отношению к другой, бóльшей части переменных.

2) Для нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в контексте метода функций Ляпунова условия устойчивости по отношению к части переменных:

– нулевого положения равновесия для случая, когда начальные возмущения, являясь малыми по исследуемой на устойчивость части переменных, могут быть в то же время большими по одной части и произвольными по другой (оставшейся) части неконтролируемых переменных;

– «частичных» (нулевых по некоторой части фазовых переменных) положений равновесия в предположении, что начальные возмущения переменных, не определяющих «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по оставшейся их части.

Приложение полученных результатов к соответствующим задачам устойчивости нелинейных голономных механических систем (дополнения к теореме Лагранжа – Дирихле).

3) Унификация (в известной мере) исследований задач частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем на основе восходящего к В.И. Зубову сведения исходной нестационарной системы к стационарной и рассмотрения для полученной стационарной системы указанных выше задач устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия.

4) Метод решения нелинейной задачи одноосной переориентации асимметричного твердого тела (посредством как двигателей, так и маховиков) при игровой модели помех.

В случае управления посредством маховиков данная задача является задачей управления по части переменных, определяющих состояние изучаемой конфликтно-управляемой системы (по переменным, определяющим состояние твердого тела). В случае управления посредством двигателей данная задача является задачей управления по всем переменным, на первом этапе решения которой решается соответствующая задача управления по части переменных.

5. Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в математической теории устойчивости и теории управления, а также в решении прикладных задач устойчивости и управления.

6. Апробация работы. Отдельные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– Уральском семинаре по механике и процессам управления (2006, 2008) и Российской школе по проблемам науки и технологий (2007-2010, г. Миасс);

– научной конференции молодых ученых УГТУ-УПИ (2008, 2009);

– VII Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (2010, г. Самара);

– Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы механики, математики, информатики» (2010, г. Пермь);

– научном семинаре кафедры теоретической механики УрГУ (2010);

– научном семинаре Института математики и механики УрО РАН (2010);

– научном семинаре кафедры прикладной математики УрФУ (2011).

Часть работы входила в состав проекта РФФИ (код проекта 07-01-00483).

7. Личный вклад автора. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных публикациях научному руководителю В.И. Воротникову принадлежит постановка задач и обсуждение полученных результатов.

8. Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, из них 3 статьи в журналах, входящих в перечень ВАК.

9. Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы (включающего 132 наименования).

Общий объем диссертации составляет 109 страниц.

Содержание работы

В **первой главе** диссертации рассматриваются нелинейные нестационарные динамические системы общего вида, для которых получены новые условия частичной нуль-детектируемости. А именно, получены условия, при которых равномерная устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость) по отношению к одной части переменных нулевого положения равновесия нелинейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений означает равномерную устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) этого положения равновесия по другой – бóльшей части переменных.

Также получены условия, при которых равномерная устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость) по отношению к отношению к одной части переменных «частичного» (нулевого) положения равновесия нелинейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений означает равномерную устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) этого положения равновесия.

Дано приложение полученных результатов к задачам стабилизации по отношению к части переменных нелинейных управляемых систем.

В *первом параграфе* получены условия детектируемости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейных нестационарных динамических систем. Рассматривается нелинейная, нестационарная конечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений (в векторной форме)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \tag{1}$$

Переменные, входящие в фазовый вектор $\mathbf{x}$, разбиваются на три части, так что $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Тогда систему (1) составят три группы уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{Y}_1(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{Y}_2(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}). \tag{2}$$

Полагается $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и вводятся обычные для теории частичной устойчивости ($\mathbf{y}$-устойчивости) предположения о непрерывности $\mathbf{X}$ в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{3}$$

$$\|\mathbf{x}\| = (\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

а также о единственности и $\mathbf{z}$-продолжимости решений системы (1).

Обозначается $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1), определенное начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$.

О п р е д е л е н и я . Положение равновесия $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (2):

1.1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво* (соответственно *равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво*), если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует неравенство $\|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ (соответственно неравенство $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$) при всех $t \geq t_0$;

1.2) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво* (соответственно *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво*), если оно равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво (соответственно равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво) и найдется $\Delta > 0$ такое, что для каждого решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.2), для которого $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$, соотношение $\lim\|\mathbf{y}_1(t; t_0,$

$\mathbf{x}_0)\| \to 0$ (соответственно $\lim\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$), $t \to \infty$ выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \ge 0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$.

З а д а ч а 1.1. Требуется в виде ограничений на структурную форму системы (2) найти условия, при которых равномерная $\mathbf{y}_1$-устойчивость (соответственно равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость) положения равновесия $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \mathbf{z}^T)^T = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (2) фактически означает равномерную $\mathbf{y}$-устойчивость (соответственно равномерную асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость) этого положения равновесия.

Для решения задачи из вектор-функций $\mathbf{Y}_2$, $\mathbf{Z}$, определяющих правые части второй и третьей групп уравнений системы (2), выделяются слагаемые, зависящие только от t, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$. В результате $\mathbf{Y}_2$, $\mathbf{Z}$ можно представить в виде

$$\mathbf{Y}_2(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}),$$
$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) = \mathbf{Z}^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) + \mathbf{R}^*(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}),$$
$$\mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0},\ \mathbf{R}^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}.$$

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются условия:*

a) *вектор-функции* $\mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})$, $\mathbf{Z}^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ *и их частные производные по* $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$ *ограничены в области* $t \ge 0$, $\|\mathbf{y}_2\| \le h$, $\|\mathbf{z}\| < \infty$;

b) *в области* (3) *найдется некоторая непрерывная вектор-функция* $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{y}_2) \equiv \mathbf{0}$ *такая, что*

$$\|\mathbf{R}^{**}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})\| \le \|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\|, \quad \mathbf{R}^{**} = (\mathbf{R}^T, \mathbf{R}^{*T})^T; \tag{4}$$

c) *имеет место тождество* $\mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$ *и «частичное» положение равновесия* $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ *«приведенной» подсистемы дифференциальных уравнений*

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}) \tag{5}$$

равномерно асимптотически устойчиво по отношению ко всем переменным.

Тогда, если положение равновесия $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \mathbf{z}^T)^T = \mathbf{0}$ *системы дифференциальных уравнений* (2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво* (*соответственно равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво*), *то оно равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво* (*соответственно равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво*); $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T)^T$.

Т е о р е м а 1.2. *Условия* a) *и* b) *теоремы* 1.1 *можно заменить условием: в области* (3) *найдется некоторая непрерывная скалярная функция* $Y_2^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $Y_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{y}_2) \equiv 0$ *такая, что*

$$\left|(\partial V(t, \mathbf{w})/\partial \mathbf{w})\mathbf{R}^{**}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{w})\right| \le \left|Y_2^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\right|. \tag{6}$$

Здесь $V(t, \mathbf{w})$ *– функция Ляпунова, решающая задачу о равномерной асимптотической устойчивости «частичного» положения равновесия* $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ *«приведенной» подсистемы дифференциальных уравнений* (5).

При выполнении условий теоремы 1.2 правая часть системы дифференциальных уравнений (2) удовлетворяет лишь общим требованиям. Не требуется ограниченности вектор-функций $\mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})$, $\mathbf{Z}^0(t, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})$ и их частных производных по $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$ в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{y}_2\| \le h$, $\|\mathbf{z}\| < \infty$.

Условие b) теоремы 1.1 легко проверяется, если из тех или иных соображений известна заранее равномерная (по t_0, $\mathbf{x}_0$) $\mathbf{z}$-ограниченность решений системы дифференциальных уравнений (2), начинающихся в достаточно малой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Условие (b), в частности, выполнено, если вектор-функция $\mathbf{R}$ не зависит от t, $\mathbf{z}$ или является ограниченной по t, $\mathbf{z}$.

Дано приложение полученных результатов к задачам стабилизации нелинейных управляемых систем. В частности, рассмотрена задача стабилизации по отношению к части переменных заданной одноосной ориентации твердого тела.

Во *втором параграфе* получены условия детектируемости (по отношению к свойству устойчивости) «частичных» положений равновесия. Предполагается, что система (2) допускает «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, являющееся инвариантным множеством этой системы.

Определения. «Частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (2):

1.3) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво* (соответственно *равномерно устойчиво*), если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$ следует неравенство $\|\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ (соответственно $\|\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$) при всех $t \geq t_0$;

1.4) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво* (соответственно *равномерно асимптотически устойчиво*), если оно равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво (соответственно равномерно устойчиво) и найдется $\Delta > 0$ такое, что для каждого решения $\mathbf{x}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (2), для которого $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$, соотношение $\lim\|\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$ (соответственно $\lim\|\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$), $t \to \infty$ выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$.

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия* a) – c) *теоремы* 1.1.

Тогда, если «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ *системы дифференциальных уравнений* (2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво* (*равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво*), *то оно равномерно устойчиво* (*равномерно асимптотически устойчиво*).

Условия a) и b) теоремы 1.1, фигурирующие в условии теоремы 1.3, можно заменить условием: в области (3) найдется непрерывная скалярная функция $Y_2^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $Y_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{y}_2) \equiv 0$, такая, что имеет место соотношение (6). В данном случае правая часть системы (2) удовлетворяет лишь общим требованиям.

В *третьем параграфе* получены условия детектируемости (по отношению к свойствам квазиустойчивости и устойчивости по части переменных) «частичных» положений равновесия.

Определения. «Частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (2):

1.5) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*квазиустойчиво* (соответственно *равномерно квазиустойчиво*), если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \leq L$ следует неравенство $\|\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ (соответственно неравенство $\|\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$) при всех $t \geq t_0$;

1.6) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*квазиустойчиво* (соответственно *равномерно квазиасимптотически устойчиво*), если оно равномерно $\mathbf{y}_1$-квазиустойчиво (соответственно равномерно квазиустойчиво) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что для каждого решения $\mathbf{x}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (2), для которого $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta(L)$,

$\|\mathbf{z}_0\| \le L$, соотношение $\lim\|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$ (соответственно $\lim\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$), $t \to \infty$) выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \ge 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta(L)$, $\|\mathbf{z}_0\| \le L$.

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия* а) – с) *теоремы* 1.1.

Тогда, если «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ *системы дифференциальных уравнений* (2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-квазиустойчиво (равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-квазиустойчиво), то оно равномерно квазиустойчиво (равномерно асимптотически квазиустойчиво).*

Во **второй главе** диссертации для нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью рассматривается задача устойчивости по отношению к части переменных нулевого положения равновесия. Делаются более общие, в сравнении с известными, допущения относительно начальных значений неконтролируемых при исследовании устойчивости переменных. Также рассматривается задача устойчивости по отношению к части переменных «частичного» положения равновесия, где аналогичные допущения касаются начальных значений переменных, не определяющих данное положение равновесия. Получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости указанного типа в контексте метода функций Ляпунова. Дается приложение полученных результатов к задаче устойчивости по части переменных положений равновесия нелинейных голономных механических систем. Обсуждается вопрос унификации (в известной мере) исследований задач частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем.

В *первом параграфе* излагается постановка рассматриваемой в диссертации задачи устойчивости по части переменных. Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Переменные, входящие в фазовый вектор $\mathbf{x}$, разбиваются на две группы: 1) $\mathbf{y}$-переменные, по которым исследуется устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) оставшиеся (неконтролируемые) $\mathbf{z}$-переменные. В свою очередь переменные, входящие в субвектор $\mathbf{z}$, разбиваются на две подгруппы, так что $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Вводятся обычные для теории частичной устойчивости ($\mathbf{y}$-устойчивости) предположения о непрерывности вектор-функции $\mathbf{X}$ в области (3), а также о единственности и $\mathbf{z}$-продолжимости решений системы (1).

В классическом определении устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений предполагается, что область начальных возмущений является достаточно малой окрестностью нулевого положения равновесия. Наряду с этой постановкой задачи изучаются также случаи, когда начальные возмущения являются произвольными или большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по неконтролируемой при исследовании устойчивости части переменных. Такие задачи тесно связаны с задачами устойчивости «частичных» (нулевых по некоторой части фазовых переменных) положений равновесия системы дифференциальных уравнений или, в более общем виде, с задачами устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств. Здесь естественны допущения о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих «частичное» положение равновесия, являются или большими, или произвольными по величине. Однако при анализе сложных нелинейных систем небезынтересны более общие случаи, когда понятие устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия предполагает, что начальные возмущения, являясь малыми по исследуемой на устойчивость части переменных, могут быть в то же время большими по одной части и произвольными по другой (оставшейся) части неконтролируемых переменных.

Для точной формулировки задачи в диссертации используются обозначения: D_δ – область начальных значений $\mathbf{x}_0$ такая, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ; $K_\mathbf{y}$, $K_{\mathbf{z}1}$ – произвольные компакты соответственно в $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}_1$-пространствах.

Определения. Нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (1) *при большом* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ является:

1) $\mathbf{y}$-*устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ и любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ следует $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$;

2) $\mathbf{y}$-*устойчивым равномерно по* t_0, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчивым*, если оно $\mathbf{y}$-устойчиво в смысле определения 1) и найдется $\Delta(t_0, L) > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0, \quad t \to \infty; \tag{7}$$

4) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчивым*, если оно $\mathbf{y}$-устойчиво равномерно по t_0 в смысле определения 2) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что соотношение (7) выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \ge 0$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$;

5) *равномерно глобально асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчивым*, если оно $\mathbf{y}$-устойчиво равномерно по t_0 в смысле определения 2), а произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) определено при всех $t \ge 0$, равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \ge 0$, $\mathbf{y}_0 \in K_\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_{10} \in K_{\mathbf{z}1}$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$ является $\mathbf{y}$-ограниченным и удовлетворяет предельному соотношению (7).

В ранее рассматривавшихся постановках задач $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) изучались три случая: 1) $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ ($\mathbf{y}$-устойчивость в смысле А.М. Ляпунова–В.В. Румянцева); 2) $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \le L$ ($\mathbf{y}$-устойчивость при большом $\mathbf{z}_0$); 3) $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$ ($\mathbf{y}$-устойчивость в целом по $\mathbf{z}_0$). Предложенные определения более общие и включают не рассмотренный ранее случай $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ В рассматривавшихся ранее постановках задач глобальной равномерной асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) изучались случаи, когда $\mathbf{y}$-притяжение решений равномерно из области $t_0 \ge 0$, $\mathbf{x}_0 \in K_\mathbf{x}$ или области $t_0 \ge 0$, $\mathbf{y}_0 \in K_\mathbf{y}$, $\|\mathbf{z}_0\| < \infty$. Область $t_0 \ge 0$, $\mathbf{y}_0 \in K_\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_{10} \in K_{\mathbf{z}1}$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$ равномерного $\mathbf{y}$-притяжения решений рассматривалась В.В. Румянцевым и А.С. Озиранером, однако разбиение вектора $\mathbf{z}_0$ на субвекторы $\mathbf{z}_{10}$ и $\mathbf{z}_{20}$ не предполагалось изначально заданным, а определялось свойствами подходящей функции Ляпунова в процессе решения задачи.

Для получения условий устойчивости указанного типа рассматриваются вспомогательные функции: 1) скалярная $V(t, \mathbf{x})$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ – непрерывно дифференцируемая в области (3), и ее производная $\dot{V}$ в силу системы (1); 2) скалярная

$V^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $V^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0$ и векторная $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{W}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ – непрерывная в области (3); 3) $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0, h]$ или соответственно при $r \in [0, \infty)$ в задаче глобальной асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости, такие, что $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ (функции типа Хана при $r \in [0, h]$ или при $r \in [0, \infty)$).

Теорема 2.1. *Пусть для системы* (1) *в области* (3) *найдется* V*-функция такая, что*

$$V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|), \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0. \tag{8}$$

Тогда при большом $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}$*-устойчиво, если, кроме того*

$$V(t, \mathbf{x}) \leq V^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0; \tag{9}$$

2) $\mathbf{y}$*-устойчиво равномерно по* t_0, *если*

$$V(t, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0. \tag{10}$$

Теорема 2.2. *Пусть для системы* (1) *в области* (3) *найдется* V*-функция, а также векторная* $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$*-функция такие, что*

$$a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}\|), \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}\|), \tag{11}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{W}(t, \mathbf{x})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

Тогда при большом $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

1) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво, если выполнены условия* (9);

2) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво, если выполнены условия* (10);

3) *равномерно глобально асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво, если условия* (10), (11) *выполнены в области* $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$ *и, кроме того*

$$a(r) \to \infty, \quad r \to \infty. \tag{12}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 обобщают теоремы А.М. Ляпунова–В.В. Румянцева.

Пусть в области (3) вспомогательная V-функция в силу системы (1) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq \omega(t, V(t, \mathbf{x})) \tag{13}$$

где $\omega(t, v)$ – непрерывная при $t \geq 0$, $v \geq 0$ функция такая, что для уравнения

$$\dot{v} = \omega(t, v), \quad \omega(t, 0) \equiv 0 \tag{14}$$

выполнены условия существования и единственности решений для каждой точки (t_0, v_0) из области определения.

Теорема 2.3. *Пусть для системы* (1) *существует* V*-функция, удовлетворяющая в области* (3) *условию* $V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|)$ *и дифференциальному неравенству* (13). *Тогда при большом* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}$*-устойчиво (эквиасимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво), если выполнены условия* (9) *и решение* $v = 0$ *дифференциального уравнения* (14) *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову*;

2) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво (равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво), если выполнены условия* (10) *и решение* $v = 0$ *дифференциального уравнения* (14) *равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) по Ляпунову.*

Теорема 2.3 дополняет известные результаты К. Кордуняну.

В качестве приложения полученных результатов сделано дополнение к классической теореме Лагранжа-Дирихле об устойчивости положений равновесия голономных механических систем, динамика которых описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{15}$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия, q_i – обобщенные координаты. Обозначая $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ вектор обобщенных координат, предполагается, что связи, наложенные на систему, не зависят явно от t, а система (15) допускает нулевое положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Компоненты вектора $\mathbf{q}$ разбиваются на две группы, так что $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_y^{\mathrm{T}}, \mathbf{q}_z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Рассматривается задача устойчивости нулевого положения равновесия системы (15) по отношению к $(\mathbf{q}_y, \dot{\mathbf{q}})$ (по части обобщенных координат и по всем обобщенным скоростям). При этом обобщенные координаты, входящие в субвектор $\mathbf{q}_z$, также разбиваются на две подгруппы: $\mathbf{q}_z = (\mathbf{q}_{z1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{q}_{z2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Нулевое положение равновесия системы (15) равномерно $(\mathbf{q}_y, \dot{\mathbf{q}})$-устойчиво при большом $\mathbf{q}_{z10}$ в целом по $\mathbf{q}_{z20}$, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что для произвольного решения системы (15) с $\|\mathbf{q}_{y0}\| < \delta$, $\|\dot{\mathbf{q}}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{q}_{z10}\| \leq L$, $\|\mathbf{q}_{z20}\| < \infty$ при всех $t \geq t_0$ выполнены неравенства $\|\mathbf{q}_y(t; t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)\| < \varepsilon$, $\|\dot{\mathbf{q}}(t; t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)\| < \varepsilon$.

Делаются предположения о том, что в области $\|\mathbf{q}_y\| \leq h$, $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq h$, $\|\mathbf{q}_z\| < \infty$ имеют место условия: 1) T определенно положительна относительно всех обобщенных скоростей; 2) Π определенно положительна по части обобщенных координат (по $\mathbf{q}_y$); 3) справедливы неравенства

$$\Pi(\mathbf{q}) \leq \Pi^*(\mathbf{q}_y, \mathbf{q}_{z1}), \quad \Pi^*(\mathbf{0}, \mathbf{q}_{z1}) \equiv 0,$$

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq T^*(\mathbf{q}_y, \mathbf{q}_{z1}, \dot{\mathbf{q}}).$$

В данном случае для системы (15) имеет место интеграл энергии $H = T + \Pi = \mathrm{const}$. Рассматривая этот интеграл в качестве V-функции Ляпунова, на основании теоремы 2.1 делается заключение, что при выполнении условий 1) –3) нулевое положение равновесия системы (15) равномерно $(\mathbf{q}_y, \dot{\mathbf{q}})$-устойчиво при большом $\mathbf{q}_{z10}$ в целом по $\mathbf{q}_{z20}$.

Приведены конкретные механические примеры, раскрывающие смысл введенных понятий устойчивости по части переменных.

Во *втором параграфе* рассматриваются соответствующие задачи устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия. Предполагается, что система (1) допускает «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Переменные, входящие в $\mathbf{y}$, разбиваются на две подгруппы переменных: $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Определения. «Частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы дифференциальных уравнений (1) *при большом* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ является:

1) $\mathbf{y}_1$-*устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ следует $\|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) $\mathbf{y}_1$*-устойчивым равномерно по* t_0, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчивым*, если оно $\mathbf{y}_1$-устойчиво в смысле определения 1) и найдется $\Delta(t_0, L) > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim \|\mathbf{y}_1(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0, \quad t \to \infty; \tag{16}$$

4) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчивым*, если оно $\mathbf{y}_1$-устойчиво равномерно по t_0 в смысле определения 2) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что соотношение (1) выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{x}_0$ из области $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть для системы* (1) *в области* (3) *найдется* V*-функция, а также векторная* $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$*-функция*, $\mathbf{U}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такие, что в области*

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\| \leq h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{17}$$

выполнены условия

$$V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\|), \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0. \tag{18}$$

Тогда при большом $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$ *«частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$: 1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если выполнены условия* (9); 2) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво равномерно по* t_0*, если выполнены условия* (10).

Заменой условия $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ неравенствами

$$V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}\|), \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}\|), \quad \mathbf{u} = [\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{W}(t, \mathbf{x})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

получены также соответствующие условия асимптотической (в том числе равномерной) $\mathbf{y}_1$-устойчивости при большом $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1).

Целесообразность изучения $\mathbf{y}_1$-устойчивости в области (17), а не в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}_1\| \leq h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty, \tag{19}$$

объясняется тем, что $\mathbf{y}_1$-устойчивое «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) всегда фактически устойчиво не только по $\mathbf{y}_1$, но также и по отношению к некоторым функциям $u_i = u_i(t, \mathbf{y})$. Однако заранее не всегда ясно, какие именно это u_i-функции. Кроме того, некоторые функции $u_i^* = u_i^*(t, \mathbf{x})$ фазовых переменных (и времени) системы (1) также могут оказаться достаточно малыми вдоль решений $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. В данной ситуации подобные u_i^* и u_i-функции естественно трактовать как компоненты дополнительной векторной $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$-функции Ляпунова для наиболее рациональной замены области (19) областью (17). Естественно, что сделанное допущение $\|\mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\| \leq h$ должно подтверждаться в процессе решения, что гарантируется условиями теоремы 2.4. При этом не требуется (как в теоремах с несколькими функциями Ляпунова) анализировать собственно производную $\mathbf{U}$-функции вдоль траекторий системы (1), что является дополнительным аргументом в пользу указанного подхода. Такой подход позволяет не только облегчить построение функций Ляпунова, но и использовать для доказательства $\mathbf{y}_1$-устойчивости функции, которые могут не быть знакоопределенными ни по $\mathbf{y}_1$ (в смысле В.В. Румянцева), ни по Ляпунову. Кроме того, производная V-функции в теореме 2.4, вообще говоря, будет знакопеременной в области (19). В рамках указанного подхода существенно нелинейные V-функции могут строиться в виде квадратичных форм $V(t, \mathbf{x}) \equiv V^*(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{U}(t, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{U}$, знакоопределенность (по отношению ко всем переменным) которых проверяется с помощью обобщенного критерия Сильвестра.

В *третьем параграфе* показано, что предложенная постановка задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия системы (1) позволяет унифицировать (в известной мере) исследования задач частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем. Вводя обозначения $w_1 = t$, $\tau = t - t_0$ нестационарную систему (1) представим в виде стационарной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau), w_1(\tau)), \quad \dot{w}_1(\tau) = 1, \tag{20}$$

где $\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{w}_1$ означают производные от функций $\mathbf{x}$, w_1 по τ.

Система (20) допускает «частичное» положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

В результате задача $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (1) сводится к задаче $\mathbf{y}$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ стационарной системы (20), а задача устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (1) сводится к задаче устойчивости этого же «частичного» положения равновесия стационарной системы (20). Особенность такого сведения в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по t_0 частичной устойчивости исходной системы (1) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (20) должны отвечать требованию «в целом по w_{10}» (или «при большом w_{10}»). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (20) допускают как требование «в целом по $\mathbf{z}_0$», так и требование «при большом $\mathbf{z}_0$», то в результате приходим к необходимости анализа задач частичной устойчивости, рассмотренных в данной главе.

Кроме того, задача $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (1) также сводится к задаче $\mathbf{y}_1$-устойчивости этого же «частичного» положение равновесия стационарной системы (20) в постановке, рассмотренной в параграфе 2.

В **третьей главе** решается нелинейная игровая задача одноосной переориентации асимметричного твердого тела при неконтролируемых помехах. Управление осуществляется либо при помощи управляющих моментов внешних сил относительно главных центральных осей инерции тела, которые создаются при помощи трех пар двигателей, либо при помощи управляющих моментов внутренних сил, приложенных к трем симметричным маховикам, оси вращения которых закреплены вдоль главных центральных осей инерции тела.

Предложен конструктивный метод построения указанных управляющих моментов, которые являются нелинейными функциями фазовых переменных рассматриваемой конфликтно-управляемой системы, включающей динамические уравнения Эйлера, кинематические уравнения Пуассона и уравнения, описывающие вращательное движение маховиков (в случае управления посредством маховиков). Указаны оценки допустимых уровней помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты. Приводятся результаты компьютерного моделирования.

В *первом параграфе* изучается задача одноосной переориентации асимметричного твердого тела при помощи трех пар двигателей.

Рассматриваются динамические уравнения Эйлера

$$
\begin{aligned}
&A_1\dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2x_3 + u_1 + v_1,\\
&A_2\dot{x}_2 = (A_3 - A_1)x_1x_3 + u_2 + v_2,\\
&A_3\dot{x}_3 = (A_1 - A_2)x_1x_2 + u_3 + v_3,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

описывающие вращательное (угловое) движение твердого тела относительно центра масс. В системе (21): A_i – главные центральные моменты инерции тела; x_i – проекции вектора мгновенной угловой скорости тела на его главные центральные оси s_i эллипсоида инерции; u_i – управляющие моменты, создаваемые специальными двигателями. Моменты v_i характеризуют внешние силы и неконтролируемые возмущения. (Здесь и далее i меняется от 1 до 3.) Вводятся обозначения: $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – векторы, состоящие соответственно из x_i, u_i, v_i.

Наряду с (21) рассматриваются определяющие ориентацию твердого тела кинематические уравнения Пуассона

$$
\begin{aligned}
&\dot{\gamma}_1 = \gamma_2x_3 - \gamma_3x_2,\ \ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3x_1 - \gamma_1x_3,\\
&\dot{\gamma}_3 = \gamma_1x_2 - \gamma_2x_1,\ \ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

в которых γ_i – проекции на главные центральные оси инерции тела единичного вектора $\mathbf{s}$, направленного вдоль неподвижной в инерциальном пространстве вертикальной оси. Вводится обозначение: $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор, состоящий из γ_i.

Управляющие моменты $u_i \in K$ ищутся по обратной связи в классе разрывных по фазовым переменным $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\gamma}$ функций. Реализации $u_i[t]$ считаются измеримыми функциями, удовлетворяющими заданным ограничениям

$$|u_i| \le \alpha_i = \mathrm{const} > 0. \tag{23}$$

Помехи $v_i \in K_1$ могут реализовываться в виде любых измеримых функций $v_i = v_i(t)$ в рамках ограничений

$$|v_i| \le \beta_i = \mathrm{const} > 0. \tag{24}$$

Для любой допустимой реализации помех $v_i[t]$ решения системы дифференциальных уравнений (21), (22) при $u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) \in K$ на рассматриваемом промежутке времени $t_0 \le t \le T$ понимаются в смысле А.Ф. Филиппова: как абсолютно непрерывные функции $\mathbf{x}[t]$, $\boldsymbol{\gamma}[t]$, удовлетворяющие при почти всех значениях $t \in [t_0, T]$ соответствующей системе дифференциальных включений.

З а д а ч а 3.1 (одноосной переориентации). Найти управляющие моменты $u_i \in K$, при любых допустимых $v_i \in K_1$ переводящие связанный с твердым телом вектор $\mathbf{r}$ за конечное время $\tau = T - t_0$ из произвольного начального положения $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ в заданное $\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$. Момент времени $T > t_0$ не фиксируется.

З а д а ч а 3.2. Найти управляющие моменты $u_i \in K$, решающие задачу 3.1 в случае $\mathbf{x}(t_0) \ne \mathbf{0}$.

Не нарушая общности считаем $\mathbf{r}(T) = (0, 1, 0)$.

Для решения поставленных задач используются управляющие моменты

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_1(1/\gamma_2)[\gamma_1 x_1 x_3 - \gamma_3(x_1^2 + x_2^2) - u_3^* + \gamma_1 u_2^*] + A^* x_2 x_3,\\
u_2 &= (A_1 - A_3)x_1 x_3 + A_2 u_2^*, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (25)\\
u_3 &= A_3(1/\gamma_2)[-\gamma_3 x_1 x_3 + \gamma_1(x_2^2 + x_3^2) + u_1^* + \gamma_3 u_2^*] - A^* x_1 x_2,\\
A^* &= A_1 - A_2 + A_3,
\end{aligned}
$$

в которых u_i^* – некоторые вспомогательные управления.

Управляющие моменты (25) позволяют выделить линейную конфликтно-управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{\gamma}_j = u_j^* + v_j^* \quad (j = 1,3), \tag{26}$$

$$\dot{x}_2 = u_2^* + v_2^*. \tag{27}$$

Для вспомогательных помех v_i^*, в силу (24), имеют место оценки

$$|v_i^*| \le \beta_i^*, \tag{28}$$

$$\beta_1^* = [(\beta_3/A_3)^2 + (\beta_2/A_2)^2]^{1/2},\ \beta_2^* = \beta_2/A_2,\ \beta_3^* = [(\beta_2/A_2)^2 + (\beta_1/A_1)^2]^{1/2}.$$

Для системы (26), (27) решается задача управления посредством u_i^* о быстрейшем приведении в положение

$$\gamma_j = \dot{\gamma}_j = 0 \quad (j = 1,3),\ \ x_2 = 0, \tag{29}$$

при ограничениях

$$|u_i^*| \le \alpha_i^*,\ \ |v_i^*| \le \beta_i^* = \rho_i \alpha_i^*,\ \ 0 < \rho_i < 1. \tag{30}$$

Указанная линейная игровая задача для системы (26), (27) сводится к задаче оптимального быстродействия для системы [Н.Н. Красовский, 1970]

$$\ddot{\gamma}_j = (1 - \rho_j) u_j^* \quad (j = 1,3), \tag{31}$$

$$\dot{x}_2 = (1 - \rho_2) u_2^*. \tag{32}$$

Решение задачи оптимального быстродействия для линейных систем типа (31), (32) имеет вид [Л.С. Понтрягин и др., 1961]

$$u_j^*(\gamma_j, \dot{\gamma}_j) = \begin{cases} \alpha_j^* \operatorname{sgn} \psi_j^\rho(\gamma_j, \dot{\gamma}_j), & \psi_j^\rho \ne 0 \\ \alpha_j^* \operatorname{sgn} \gamma_j = -\alpha_j^* \operatorname{sgn} \dot{\gamma}_j, & \psi_j^\rho = 0 \end{cases} \tag{33}$$

$$u_2^*(x_2) = \begin{cases} -\alpha_2^* \operatorname{sgn} x_2, & x_2 \ne 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases} \tag{34}$$

где $\psi_j^\rho(\gamma_j, \dot{\gamma}_j) = -\gamma_j - [2\alpha_j^*(1 - \rho_j)]^{-1} \dot{\gamma}_j |\dot{\gamma}_j|$ – функции переключений.

Время τ в задаче быстродействия для систем (31), (32) есть минимальное гарантированное время в линейной игровой задаче управления и гарантированное время переориентации в исходной задаче.

Решение линейной игровой задачи означает решение исходной нелинейной задачи по части переменных: по переменным γ_1, γ_3, x_2. Однако решая уравнения Пуассона как алгебраические относительно x_1, x_3, получаем равенства

$$x_1 = (1/\gamma_2)(-\dot{\gamma}_3 + \gamma_1 x_2),\quad x_3 = (1/\gamma_2)(\dot{\gamma}_1 + \gamma_3 x_2). \tag{35}$$

Поэтому фактически решение линейной игровой задачи означает решение исходной нелинейной задачи управления по отношению ко всем переменным.

Получены оценки допустимых уровней помех в задаче 3.1.

Вводятся обозначения $\Gamma_j = |\gamma_{20}|\alpha_j/[A_j(1+\gamma_{j0}^2)^{1/2}]$ $(j = 1,3)$.

Теорема 3.1. *Если область помех v_i определяется неравенствами*

$$[(\beta_1/A_1)^2 + 2(\beta_2/A_2)^2]^{1/2} < \Gamma_1, \tag{36}$$

$$[2(\beta_2/A_2)^2 + (\beta_3/A_3)^2]^{1/2} < \Gamma_3, \quad \beta_2 < \alpha_2,$$

то задача 3.1 *может быть решена посредством управляющих моментов* (25), (33), (34) *удовлетворяющих заданным ограничениям* (23).

Полученные оценки являются завышенными в силу использования ряда неравенств для их обоснования, а также в силу предположения о «наихудшем» поведении системы в рамках заданных ограничений. Однако компьютерное моделирование показывает работоспособность конструкции управляющих моментов (25) и в случаях, когда уровни β_i помех v_i выходят за указанные ограничения.

Итерационный алгоритм решения задачи 3.1 включает этапы. 1) Выбор конструкции (25) управляющих моментов u_i с u_i^* вида (33), (34). В случае $\mathbf{r}(T) \neq (0, 1, 0)$ достаточно перейти к управляющим моментам, получающимся из (25) перестановкой индексов. 2) Оценка уровней β_i^* вспомогательных помех v_i^* по формулам (28). 3) «Назначение» уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^*. При этом числа α_i^*, β_i^* предопределяют соответствующее значение $\tau = T - t_0$ гарантированного времени переориентации твердого тела. 4) Проверка выполнимости заданных ограничений (23) для управляющих моментов u_i. Эту проверку можно осуществить на множестве возможных состояний вспомогательной линейной системы (26), (27), (33), (34). Если оценки (23) не выполняются, или наоборот, есть «резерв» в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих чисел α_i^*. В противном случае переориентация осуществляется за время τ.

Во *втором параграфе* рассмотрена модификация предложенного подхода решения задачи 3.1 в направлении получения более простых управляющих моментов. В частности, в них можно избавиться от составляющих, компенсирующих гироскопические моменты тела. Управляющие моменты упрощаются за счет усложнения структуры вспомогательных помех в образующихся линейных системах. В данном случае оценки вспомогательных помех требуют расчета на множестве состояний линейных вспомогательных конфликтно-управляемых систем. Для проведения оценок используется принцип «назначения и последующего подтверждения» уровней этих помех.

А именно, используются управляющие моменты

$$u_1 = A_1(1/\gamma_2)(-u_3^* + \gamma_1 u_2^*), \quad u_2 = A_2 u_2^*, \quad u_3 = A_3(1/\gamma_2)(u_1^* + \gamma_3 u_2^*). \tag{37}$$

Теорема 3.2. *Если область помех имеет вид* (36), *то задача* 3.1 *может быть решена посредством управляющих моментов* (37), (33), (34), *удовлетворяющих заданным ограничениям* (23).

В данном случае решение задачи 3.1 предполагает этапы. 1) Выбор конструкции (37) управляющих моментов u_i с u_i^* типа (33), (34). На этом этапе не только α_i^*, но и уровни v_i^*, не определены. 2) Предварительный выбор величины τ и «назначение» β_i^*. Это предопределяет значения α_i^*, ρ_i. 3) Проверка фактического выполнения неравенств $|v_i^*| \le \beta_i^*$ на множестве Ω состояний линейной системы (26), (27), (33), (34) (принцип «назначения и последующего подтверждения» для оценки v_i^*). 4) Проверка выполнимости заданных ограничений (23) на управляющие моменты u_i на множестве Ω.

В *третьем параграфе* решается задача одноосной переориентации асимметричного твердого тела при помощи трех симметричных маховиков, оси вращения которых закреплены вдоль главных центральных осей вращения тела.

Вращательное движение этой системы (трехроторного гиростата) вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
&(A_1 - J_1)\dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2x_3 - J_3\dot{\varphi}_3x_2 + J_2\dot{\varphi}_2x_3 - u_1 + v_1,\\
&(A_2 - J_2)\dot{x}_2 = (A_3 - A_1)x_1x_3 - J_1\dot{\varphi}_1x_3 + J_3\dot{\varphi}_3x_1 - u_2 + v_2,\\
&(A_3 - J_3)\dot{x}_3 = (A_1 - A_2)x_1x_2 + J_1\dot{\varphi}_1x_2 - J_2\dot{\varphi}_2x_1 - u_3 + v_3,\\
&J_i(\ddot{\varphi}_i + \dot{x}_i) = u_i,
\end{aligned} \tag{38}$$

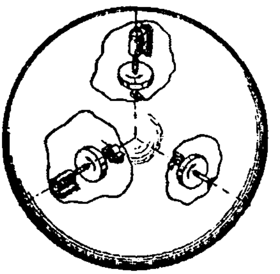

Рис. Трехроторный гиростат

в которых: A_i – главные центральные моменты инерции гиростата; x_i – проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси $\mathbf{k}_i$ эллипсоида инерции гиростата; J_i, φ_i – осевые моменты инерции и углы поворота маховиков, оси вращения которых неподвижно закреплены вдоль осей $\mathbf{k}_i$. Управляющие моменты u_i (в данном случае моменты внутренних сил) приложены к маховикам и создаются специальными двигателями. Моменты v_i характеризуют внешние силы и внешние неконтролируемые возмущения, действующие на основное тело.

З а д а ч а 3.3 (одноосной переориентации). Требуется найти управляющие моменты $u_i \in K$, при любых допустимых $v_i \in K_1$ переводящие связанный с гиростатом вектор $\mathbf{r}$ за конечное время из произвольного начального положения $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ в заданное $\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$. Кроме того, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0) = \mathbf{0}$. Момент времени $T > t_0$ не фиксируется.

Не нарушая общности считаем $\mathbf{r}(T) = (0, 1, 0)$.

Для решения поставленной задачи используются управляющие моменты

$$\begin{aligned}
&u_1 = (A_1 - J_1)(1/\gamma_2)[-\gamma_1x_1x_3 + \gamma_3(x_1^2 + x_2^2) + u_3^* - \gamma_1u_2^*] - (A^* - J_1)x_2x_3 +\\
&+ J_2\dot{\varphi}_2x_3 - J_3\dot{\varphi}_3x_2,\\
&u_2 = (A_3 - A_1)x_1x_3 - (A_2 - J_2)u_2^* - J_1\dot{\varphi}_1x_3 + J_3\dot{\varphi}_3x_1,\\
&u_3 = (A_3 - J_3)(1/\gamma_2)[\gamma_3x_1x_3 - \gamma_1(x_3^2 + x_2^2) - u_1^* - \gamma_3u_2^*] + (A^* - J_3)x_1x_2 +\\
&+ J_1\dot{\varphi}_1x_2 - J_2\dot{\varphi}_2x_1, \quad A^* = A_1 - A_2 + A_3,
\end{aligned} \tag{39}$$

в которых u_i^* – некоторые вспомогательные управления.

Управляющие моменты (39) позволяют выделить линейную конфликтно-управляемую систему дифференциальных уравнений (26), (27), в которой вспомогательные помехи v_i^* и оценки их уровней β_i^* имеют вид

$$
\begin{aligned}
&v_1^* = \gamma_2 v_3/(A_3 - J_3) - \gamma_3 v_2/(A_2 - J_2),\\
&v_2^* = v_2/(A_2 - J_2), \quad v_3^* = \gamma_1 v_2/(A_2 - J_2) - \gamma_2 v_1/(A_1 - J_1),\\
&\beta_1^* = [(\beta_3/(A_3 - J_3))^2 + (\beta_2/(A_2 - J_2))^2]^{1/2}, \quad \beta_2^* = \beta_2/(A_2 - J_2),\\
&\beta_3^* = [(\beta_2/(A_2 - J_2))^2 + (\beta_1/(A_1 - J_1))^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Для линейной системы (26), (27) решается вспомогательная задача управления посредством u_i^* вида (33), (34) о быстрейшем приведении в положение (29) при ограничениях (30).

В силу соотношений (35), фактически решение вспомогательной линейной игровой задачи означает решение исходной нелинейной задачи управления по требуемой части переменных: по отношению к переменным x_i, γ_i.

Вводятся обозначения

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_j = |\gamma_{20}|\alpha_j / [(A_j - J_j)(1 + 9\gamma_{j0}^2)^{1/2}] \quad (j = 1,3),\\
&\Gamma_2 = |\gamma_{20}|\alpha_2 / [(A_2 - J_2)(\gamma_{20}^2 + 8(|\gamma_{10}| + |\gamma_{30}|)^2)^{1/2}].
\end{aligned}
$$

Т е о р е м а 3.3. *Если область помех определяется неравенствами*

$$
\begin{aligned}
&[(2\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)/(A_1 - J_1)^2 + 2\beta_2^2/(A_2 - J_2)^2]^{1/2} < \Gamma_1,\\
&[(2\beta_3^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)/(A_3 - J_3)^2 + 2\beta_2^2/(A_2 - J_2)^2]^{1/2} < \Gamma_3,\\
&[(2\beta_2^2 + \beta_1^2 + \beta_3^2)/(A_2 - J_2)^2]^{1/2} < \Gamma_2,
\end{aligned}
$$

то задача 3.3 *может быть решена посредством управляющих моментов* (39), (33), (34), *удовлетворяющих заданным ограничениям* (23).

Итерационный алгоритм решения задачи 3.3 включает этапы. 1) Выбор конструкции (39) управляющих моментов u_i с u_i^* вида (33), (34). 2) Оценка уровней β_i^* вспомогательных помех v_i^* по формулам (40). 3) «Назначение» уровней α_i^* вспомогательных управлений u_i^*. 4) Проверка выполнимости заданных ограничений (23) для управляющих моментов u_i. Эту проверку можно осуществить на множестве возможных состояний вспомогательной линейной системы (26), (27), (33), (34), а также линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений для определения $\dot\varphi_i$ (такая система получается после подстановки первых трех уравнений системы (38), в которых u_i заменяются соотношениями (39), в оставшиеся три уравнения системы (38)).

Учитывая структуру управляющих моментов (39), заключаем, что для их оценки достаточно иметь оценки выражений $A_i x_i + J_i\dot\varphi_i$. Такие оценки можно получить, используя функцию

$$
M^2(t) = (A_1 x_1 + J_1\dot\varphi_1)^2 + (A_2 x_2 + J_2\dot\varphi_2)^2 + (A_3 x_3 + J_3\dot\varphi_3)^2.
$$

При вычислении ее производной в силу системы (38), используя неравенство Коши–Буняковского и неравенства (24), получаем $\dot M \le (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{1/2}$, и искомые оценки имеют вид $|A_i x_i + J_i\dot\varphi_i| \le t(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{1/2}$.

10 –

Публикации по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2009. №1. С.25–38.

2. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №5. С.23–31.

3. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К нелинейной игровой задаче одноосной переориентации асимметричного твердого тела // Системы управления и информационные технологии. 2010. №2(40). С.4–8.

Другие публикации

4. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче устойчивости инвариантных некомпактных множеств нелинейных динамических систем // Наука и технологии. Труды XXVII Российской школы. М.: РАН, 2007. С.291–295.

5. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К трем классам задач частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Механика и процессы управления. Труды XXXVIII Уральского семинара. Т.2. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С.57–66.

6. Мартышенко Ю.Г., Воротников В.И. К задаче устойчивости некомпактных инвариантных множеств нелинейных динамических систем // Научные труды XIV отчетной конференции молодых ученых УГТУ-УПИ. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. С.40–44.

7. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче стабилизации заданной ориентации асимметричного твердого тела посредством двух управляющих моментов // Механика и процессы управления. Труды XXXIX Уральского семинара. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С.276–280.

8. Мартышенко Ю.Г. К задаче устойчивости по части переменных нелинейных динамических систем // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды VII Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2010. С.177–179.

9. Мартышенко Ю.Г. К нелинейной игровой задаче переориентации твердого тела. Наука и технологии. Том 2. – Краткие сообщения XXX Российской школы, посвященной 65-летию Победы. – Екатеринбург: УрО РАН, 2010. С. 63–65.

10. Мартышенко Ю.Г. К задаче устойчивости по части переменных нелинейных динамических систем // Актуальные проблемы механики, математики, информатики. Тезисы докладов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Пермь: ПГУ, 2010. С.136.

11. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К нелинейной игровой задаче одноосной переориентации асимметричного твердого тела // Актуальные проблемы механики, математики, информатики. Тезисы докладов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Пермь: ПГУ, 2010. С.66.